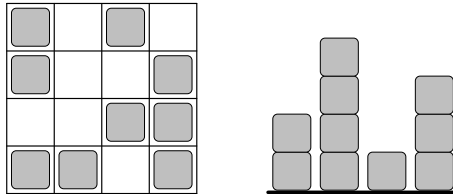


9 класс. Условия задач

1. При каком наименьшем натуральном n число $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ натурально и оканчивается тремя нулями?

2. В банке в сейфе лежат кубические золотые слитки. На рисунке слева показан вид сверху расположения слитков, а на рисунке справа — вид с одной из четырёх боковых сторон сейфа. Какое максимальное количество золотых слитков может быть в сейфе?



3. В неравностороннем прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна 2021. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину прямого угла, основание высоты, опущенной из этой вершины на гипотенузу, и середину большего катета.

4. Есть натуральные числа от 1 до 2021. Какое наибольшее число из них можно взять так, чтобы сумма любых двух из взятых чисел не делилась на их разность?

5. Найдите 1010-ю цифру после запятой в числе $(3 - 2\sqrt{2})^{2021}$.

10 класс. Условия задач

1. При каких натуральных n числа n и n^{2021} оканчиваются на одну и ту же цифру?

2. Для любого натурального числа z обозначим через $S(z)$ сумму его цифр, а через $P(z)$ — произведение его цифр. Рассмотрим последовательность z_n , в которой $z_1 = 1$ и

$$z_n = S(z_{n-1}) + P(z_{n-1})$$

для любого $n \geq 2$. Найдите все натуральные n , для которых $z_n = n$.

3. В совместной конференции лжецов (всегда лгут) и правдолюбков (всегда говорят правду) участвовало 55 человек, некоторые из которых знакомы друг с другом. Организатор конференции спросил каждого про каждого из остальных: «Знает ли он этого участника?» Все отвечали только «да» или «нет». Могло ли оказаться, что общее число ответов «да» равно 555?

4. На стороне AB треугольника ABC отметили точку C_1 , на стороне BC — точку A_1 , на стороне CA — точку B_1 . Оказалось, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 2$, а треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний. Докажите, что исходный треугольник ABC — тоже равносторонний.

5. Сумма каких-то четырёх чисел равна сумме их квадратов. Произведение этих четырёх чисел равно единице. Докажите, что все четыре этих числа равны единице.

11 класс. Условия задач

1. Решите уравнение $x^2 - 4x \cdot \cos(\pi x^{2021}) + 4 = 0$.

2. Для любого натурального числа z обозначим через $S(z)$ сумму его цифр, через $P(z)$ — произведение его цифр, а через $N(z)$ — количество его цифр. Для любого натурального k рассмотрим последовательность $z_n(k)$, в которой $z_1(k) = k$ и

$$z_n(k) = (P(z_{n-1}(k)) + N(z_{n-1}(k))) \cdot S(z_{n-1}(k))$$

для любого $n \geq 2$. Какое число больше, $z_{2022}(2021)$ или $z_{2020}(1)$?

3. Все грани многогранника — треугольники. Сколько граней у него может быть?

4. Существуют ли целые числа x и y , для которых $x^3 = 4y^2 + 4y - 3$?

5. В ряд стоит 25 осликов, самый правый из них — Иа-Иа. Винни-Пух хочет дать каждому ослику по воздушному шарiku одного из семи разных цветов радуги (включая зелёный) так, чтобы стоящие рядом ослики получили бы шарики разного цвета и шарик каждого цвета хоть кто-нибудь да получил бы. Иа-Иа хочет подарить каждому из 24 остальных осликов горшок одного из цветов радуги (кроме зелёного) так, чтобы горшок каждого цвета хоть кто-нибудь да получил бы (но соседи могут получать и одноцветные горшки). У кого больше способов осуществить задуманное и во сколько раз — у Винни-Пуха или у Иа-Иа?